Vállalatok egy Neumann-típusú gazdaságban

Dobos Imre
Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment tanszék
Vállalatgazdaságtan Intézet
Budapesti Corvinus Egyetem
1093 Budapest, Fővám tér 8.

Absztrakt. A dolgozat a klasszikusnak tekinthető Neumann-féle növekedési modell egy új alapra helyezését tartalmazza. Az eredeti Neumann-modellben expliciten vállalatok nem szerepelnek, csak technológiák, vagy eljárások. A dolgozat egy olyan Neumann-típusú modellt vizsgál, amelyben az egyes technológiáknak vállalatokat feleltet meg, és azt vizsgálja, hogy ilyen feltételezés mellett egy ilyen gazdaságban léteznek-e olyan megoldások, amelyek mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. Ennek vizsgálata közben arra az eredményre juthatunk, hogy erre az esetre a klasszikus Neumann-modell által feltételezett nempozitív nyereséget felül kell vizsgálni, ami a klasszikus matematikai közgazdaságtan dualitáson alapuló alapfeltételezése.

Kulcsszavak: Neumann-modell, Növekedési modell, Optimalizálás, Matematikai programozás.

Abstract. The paper investigates a generalization of the classical growth model of John von Neumann. There are only technologies in model of von Neumann. The aim of the paper is to rename technologies as firms and it is analyzed whether there exist equilibrium prices and quantities for firms to maximize the total profit. The paper reexamines the classical assumption about the duality of prices, i.e. it is allowed a nonnegative profit of firms.

Keywords: Model of von Neumann, Growth model, Optimization, Mathematical programming.

1. Bevezetés

A Neumann-modellt tekintik ma a növekedési és egyensúlyelméletek egyik előfutárának. Ugyanakkor ez a modell felfogható úgy is, mint a Koopmans (1951) által kifejlesztett lineáris tevékenységelemzés dinamikus változata. A modell széles körben kutatott nem csak az angolszász világban, hanem magyar matematikai közgazdaságtanban is, csak néhány dolgozatot említve: Medvegyev (1984), Móczár (1995), Móczár (1997), Zalai (1999), Zalai (2004).

A klasszikus Neumann-modell gazdaságában n terméket állítanak elő m különböző eljárás, vagy technológia segítségével. A modell Neumann János által adott interpretációjában nem deríthető ki, hogy az eljárásokhoz vállalatokat, vagy ipari ágazatokat lehet-e rendelni, netán több eljárás testesíti meg a vállalatokat. Amint az a modellből is kitűnik, az eljárások csak nempozitív nyereség mellett működhetnek. Ez a vállalati gyakorlattal, és a vállalatgazdaságtanban oktatottakkal ellentétesnek tűnik. A vállalatgazdaságtan vállalatai nem létezhetnek középtávon (pozitív) nyereség nélkül, mert különben csődbe jutnak.

---

[1] A szerző köszöni Zalai Ernőnek a dolgozat korábbi változataihoz fűzött alapos megjegyzéseit. Minden további dolgozatban maradó hiba és pontatlanság a szerzőt terheli.

A dolgozat célja ezért az, hogy a klasszikus Neumann-modell egyes feltételezéseit megtartva egy új, más értelmezését adjon a bemutatandó modellnek. Az új értelmezésben tételezzük, fel, hogy a technológiák vállalatokat testesítenek meg. Arra építjük a módosított modell ezen értelmezését, hogy egy eljáráshoz egy vállalat rendelhető. Ekkor a vállalatok ikertermékeket állíthatnak elő. Azt a modellváltozatot, amikor csak egy termék állítható elő az adott technológiával, Leontief-Neumann-modellnek nevezik.

A dolgozat az alábbi részekből áll. A következő részben a Neumann-modell egy dinamikus változatát mutatjuk be, aminek a stacionárius esetét, azaz egyensúlyi helyzetét vizsgálta Neumann (1945), majd Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) gazdaságilag racionális feltételekkel bővítette azt ki. Ezen az eredeti modellen mutatjuk meg, hogy ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy egy eljárás egy vállalatnak feleltethető meg, akkor a nempozitív nyereség feltételezése esetén a vállalatok nyereségüket akkor is maximalizálhatnák, ha nem termelnének semmit. Ugyanakkor az így előálló zérus optimális kumulált nyereséget a modell klasszikus Neumann-i megoldása is garantálja, tehát a megoldások halmaza egy konvex halmaz. Ezért a nempozitív nyereség feltételezést helyettesítjük a nemnegatív nyereség feltevésével, amennyiben az eljárásokat vállalatnak (ágazatnak) tekintjük, mert az a gazdaság tevékenységeinek megszüntetését is jelenthetné, ha az optimális megoldások halmazából a vállalatok a semmittevés stratégiáját választanák. A harmadik fejezetben az átfogalmazott modellt vizsgáljuk. Amennyiben az eljárások vállalatoknak felelnek meg, akkor is azt kérdezhetjük, hogy milyen termelési szintek és árak mellett lesz a gazdaság egyensúlyban. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához egy játékelméleti modellt vázolunk, és röviden érintjük a modell megoldhatóságát. Végül összegezzük az eredményeket.

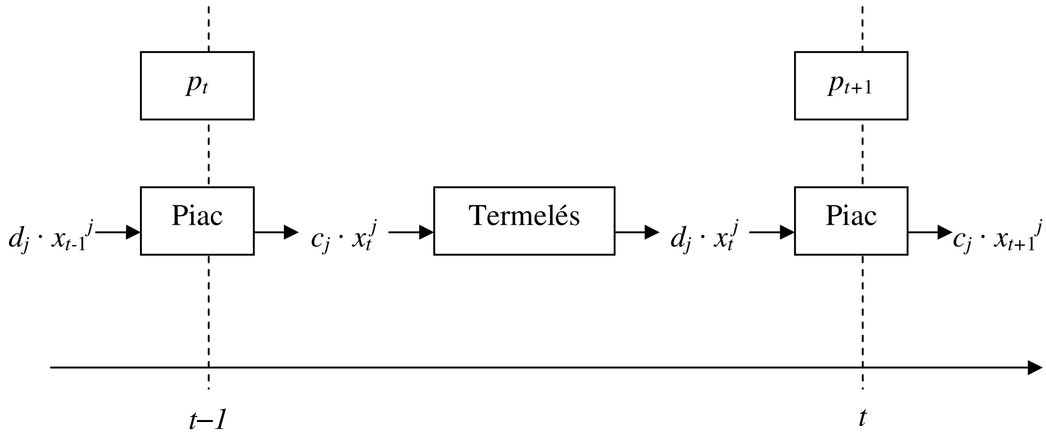
2. A Neumann-modell dinamikus változata és annak átfogalmazása

Ebben a részben egészen bemutatjuk a Neumann-modellt. E dolgozatban nem célunk a Neumann-modell didaktikus bemutatása, azt Zalai (1999) dolgozatában aprólékosan megtette. A modell bemutatásakor nem a stacionárius, egyensúlyi megoldásból indulunk ki, hanem a turnpike-elméletben (Dorfman-Samuelson-Sollow (1958)) alkalmazott dinamikus lineáris programozási feladat megoldásából. E megoldás alapján azt vizsgáljuk, hogy vajon a Neumann-modell megoldása utat enged-e annak a megfeleltetésnek, hogy egy eljárás egy vállalatot takar.

2.1. A Neumann-modell rövid összefoglalása

A modell dinamikus változatát Asmanov (1984) munkája alapján ismertetjük. A modell alapmátrixait a Hegedűs és Zalai (1978) könyvében található mátrixos jelölésekkel ismertetjük, a Neumann által használt hagyományosabb jelöléssel szemben.

A modell alapfeltételezései között szerepel, hogy a j-ik technológia egységnyi szintű alkalmazásához $c_j = (c_{1j}, c_{2j},\dots, c_{nj})$ nagyságú indulókészletre van szükség a termékekből, míg a termelési periódus végén egységnyi szintű alkalmazás esetén $d_j = (d_{1j}, d_{2j},\dots, d_{nj})$ készlet áll rendelkezésre a piaci cserére. A j-ik technológia input-output összefüggéseit tehát a (c_j, d_j) vektorpárral szemléltethetjük. A vektorok n dimenziósak, vagyis a gazdaságban n számú termék van, míg az eljárások száma m. Ha a j-ik technológia alkalmazási szintje a t-ik periódusban x_t^j, akkor az eljárás induló készlete $c_j \cdot x_t^j$ és a periódus zárókészlete $d_j \cdot x_t^j$. Az eljárással előállított, és piacon értékesíthető termékek mennyisége tehát $d_j \cdot x_t^j$. A t-ik termelési periódus végén, a t-ik időpontban zajlik le a piaci csere az ott kialakuló áron, amelyet a $p_{t+1} = (p_{t+1}^{1}, p_{t+1}^{2}, \ldots, p_{t+1}^{n})$ nemnegatív n elemű vektorral jelölünk Az anyagáramlást a technológiák szempontjából az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A Neumann-modell dinamikája a *j*-ik eljárásra
Forrás: Lancaster (1968)

Foglaljuk most össze a gazdaságra az egyensúlyi feltételeket. A naturális egyensúly feltétele a t-ik időpontban az, hogy a piacra vitt termékek készlete a csere után nem lehet nagyobb, mint a csere előtt az egész gazdaságban, vagyis $D \cdot x_{t-1} - C \cdot x_t \geq 0$, ahol $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ és $D = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$ a technológiák egységnyi input és output készletének mátrixa. Az $x_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^m)$ vektor a termelési szintek m dimenziós vektorát jelöli a t-ik periódusban. A nempozitív nyereségre pedig a $p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C \leq 0$ összefüggés írható fel. Ha feltesszük, hogy a gazdaság tervezési időhorizontja T, akkor az induló készletek állománya $D \cdot x_0$, míg a terminális árbevétel összértéke $p_{T+1} \cdot D \cdot x_T$ kell, hogy legyen, ahol az x_0 kezdeti termelési szint és a p_{T+1} végső árrendszer adottak. Ezen kívül a Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) által javasolt feltételeket a modellhez csatoljuk, ami azt jelenti, hogy minden termék szükséges legalább egy másik termék előállításához: $1 \cdot C > 0$, valamint minden termék előállítható legalább egy eljárással: $D \cdot 1 > 0$, ahol az $1 = (1,1,\ldots,1)$ az összegző vektort jelöli.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az előzőekben intuitívan kapott egyensúlyi feltételek egy lineáris programozási feladat primális és duális párjainak fele meg. A programozási feladat primális oldala a következő (1)-(4) feladat:

$x_t \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T),$ (1)
$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0,$ (2)
$- D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, \ (t = 2,3,\ldots,T),$ (3)
$p_{T+1} \cdot D \cdot x_T \to \max.$ (4)

Ez a feladat később a turnpike elméletek kiindulópontja volt, amely Dorfmann, Samuelson és Solow (1958) munkájában található meg. Ezek szerint, ha T elég nagy, akkor az optimális pálya a Neumann-sugárhoz esik elég közel. (A Neumann-sugarat a következő bekezdésekben definiáljuk.)

A fenti feladat (5)-(8) duálisát az alábbi módon írhatjuk fel:

$p_t \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T),$ (5)
$p_t \cdot C - p_{t+1} \cdot D \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T),$ (6)

$$p_T \cdot C \geq p_{T+1} \cdot D, \qquad (7)$$
$$p_1 \cdot D \cdot x_0 \rightarrow \min. \qquad (8)$$

A két lineáris programozási feladat megoldható, mivel a C és D mátrixokra tett feltételek biztosítják egyrészt a primális feladat lehetséges megoldásainak halmaza korlátosságát, másrészt a duális feladat lehetséges megoldásainak halmaza alulról korlátosságát. Az optimális $(x_t^o, p_t^o)_{t=1}^T$ vektorpároknak ki kell elégíteniük a következő egyenlőségeket:

$$p_t^o \cdot (C \cdot x_t^o - D \cdot x_{t-1}^o) = 0, \qquad (9)$$
$$(p_t^o \cdot C - p_{t+1}^o \cdot D) \cdot x_t^o = 0. \qquad (10)$$

Vegyük most a probléma stacionárius megoldását, vagyis legyen $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$, akkor a stacionárius pályának ki kell elégítenie a

$$D \cdot x^e \geq \alpha^e \cdot C \cdot x^e, \qquad (11)$$
$$p^e \cdot D \cdot x^e = \alpha^e \cdot p^e \cdot C \cdot x^e, \qquad (12)$$
$$p^e \cdot C \geq \beta^e \cdot p^e \cdot D, \qquad (13)$$
$$p^e \cdot C \cdot x^e = \beta^e \cdot p^e \cdot D \cdot x^e, \qquad (14)$$
$$p^e \cdot C \cdot x^e > 0 \qquad (15)$$

összefüggésrendszert, ami a Neumann-modell egyensúlyi helyzeteit foglalja össze. Az x és p vektorok nemnegatívak. A (11)-(15) egy egyensúlyi pályáját a $(\alpha^e, x^e, \beta^e, p^e)$ négyessel írhatjuk le, amit *Neumann-sugár*nak neveznek. Ezekből a pályákból keressük a legnagyobb α^e-t tartalmazó növekedési pályákat. A (11)-(15) modell egyensúlyi pályáinak létezésével nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasó annak bizonyítását megtalálja pl. Hegedűs és Zalai (1978) könyvében.

2.2. Lehet-e a klasszikus Neumann-modellben vállalat egy eljárás?

Most áttérünk annak a vizsgálatára, hogy mi történhet akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak tekintjük, és ezzel folytatjuk elemzésünket. Ekkor a Neumann-féle gazdaságban fellelhető nempozitív nyereség feltételezését fel kell oldani, mert a vállalatgazdaságtanban a nempozitív nyereség a vállalat megszűnéséhez vezethet, amint azt a következő példa mutatja. Előbb vizsgáljuk a vállalat működését, amit most azonosítunk a klasszikus Neumann-modell egy-egy eljárásával.

Az egyes vállalatok termékeit feloszthatjuk aszerint, hogy nyersanyagról, alapanyagról van-e szó, vagy végtermékről. Ezt a következő módon szemléltethetjük a j-ik vállalat esetén. Az i-k termék végtermék, azaz a piacon értékesíthető termék, ha $d_{ij} > c_{ij}$. Ugyanakkor egy másik, k-ik termék nyersanyag, ha $d_{kj} \leq c_{kj}$. Így a j-ik eljárással előállított termékek mennyisége a t-ik periódusban, ahol i végterméket jelöl $(d_{ij} - c_{ij})\cdot x_t^j > 0$, míg a felhasználás $(c_{kj} - d_{kj})\cdot x_t^j \leq 0$ a k-ik nyersanyag esetén. Itt azzal a feltételezéssel élhetünk, hogy a készletváltozást azonosítjuk a termeléssel és a termelő felhasználással. Mivel a modell csak stock (állomány) jellegű mutatókat tartalmaz, ezért a flow (folyam) mutatókat a készlet adatokból kell meghatároznunk.

A piacon az eljáráshoz, termeléshez felhasznált (így megsemmisített) terméket kell beszerezni, pl. a t-ik időpontban az k-ik termék esetén $c_{kj} \cdot x_t^j - d_{kj}\cdot x_{t-1}^j \geq 0$ nagyságban. Ezzel a mennyiséggel növekszik az eljárás lefolytatásához a következő periódusban rendelkezésre álló készletek mennyisége. Ugyanezen időpontban az értékesítés mennyisége $d_{ij}\cdot x_{t-1}^j - c_{ij} \cdot x_t^j > 0$. Ez a folyam mutató a készletek csökkenését szemlélteti. Újra meg kell jegyeznünk, hogy a csere esetén is stock adatokból kell flow információkat előállítanunk. Ezzel az eljárással két tevékenységre bontottuk a Neumann-modellben megadott folyamatokat: termelésre és piaci cserére.

Az előbb bemutatott összefüggéseket a készletgazdálkodásból ismert stock-flow (állomány-folyam) egyenletek segítségével is szemléltethetjük:

$$d_j \cdot x_t^j = d_j \cdot x_{t-1}^j + \left(d_j - c_j\right) \cdot x_t^j - \left(d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j\right), \ (t = 1, 2, \ldots, T). \qquad (16)$$

A vállalat a termelési folyamat során $\left(d_j - c_j\right) \cdot x_t^j$ mennyiségű terméket állít elő, illetve semmisít meg az előbbi bekezdésekben meghatározott értelemben, míg a piaci csere során $d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j$ nagyságú terméket értékesít, vagy szerez be a termelés folytatásához.

A vizsgált vállalat által elért piaci bevétel-kiadást a t-ik időpontban a $p_t \cdot (d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j)$ kifejezéssel írhatjuk le, ahol $p_t = (p_t^1, p_t^2, \ldots, p_t^n)$ vektor az árak n dimenziós vektora a t-ik időpontban. Ez csak a piaci árbevétel, de nem a nyereség. A nyereséget az egyes periódusokra értelmezhetjük, ami a t-ik periódusra $p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j$. Ezt azért írhatjuk ebben a formában, mert két időszak „mérlegfőösszege” közötti különbség lesz az eredménykimutatásban szereplő nyereség, vagy veszteség a vállalat számára, amint az a vállalati számvitelben szerepel. Alakítsuk ezt az összefüggést tovább az alábbi módon, a (16) egyenletrendszert az árvektorral beszorozva:

$$p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j = \left(p_{t+1} - p_t\right) \cdot d_j \cdot x_t^j + p_t \cdot \left(d_j - c_j\right) \cdot x_t^j - p_t \cdot \left(d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j\right)$$

Ez azt mutatja, hogy a nyereség három részből áll, amelyek

- a Bródy (1980) által is leírt papírprofit: $\left(p_{t+1} - p_t\right) \cdot d_j \cdot x_t^j$,
- a termelési tevékenység során képződő „belső” nyereség: $p_t \cdot \left(d_j - c_j\right) \cdot x_t^j$, és
- a piaci csere során kialakult áru-pénz egyenlege (árbevétel): $p_t \cdot \left(c_j \cdot x_t^j - d_j \cdot x_{t-1}^j\right)$.

Az eredeti Neumann-modellben az eljárások nyeresége nempozitív, tehát $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \leq 0$.

Ezek után tételezzük fel, hogy az így megalkotott vállalat célja az árbevétel/ráfordítás maximalizálása a tervezési időhorizonton. Feltesszük azt is, hogy az árak egy adott T időhorizonton belül adottak, és az (5)-(8) lineáris programozási feladat optimális megoldásával egyeznek meg. Nem foglalkozunk azzal, hogy milyen mechanizmus alakítja ki az optimális, egyensúlyi árakat, amit p_t^o-vel jelölünk, $t = 1,2,\ldots,T$. A vállalat kumulált árbevételfüggvénye a vizsgált tervezési horizonton a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t^o \cdot \left(d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j\right) + p_{T+1} \cdot d_j \cdot x_T^j = \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j\right) \cdot x_t^j + p_1^o \cdot d_j \cdot x_0^j. \qquad (17)$$

A vállalat célja tehát olyan termelési szintek kiválasztása, amely mellett az árbevétel maximális lesz, természetesen adott árak mellett. Tegyünk még egy feltételezést, ami az egyensúly naturális feltételéből következik:

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{t-1}^{ko} - c_k \cdot x_t^{ko}\right), (t = 1,2,..,T), \tag{18}$$

ami azt jelenti, hogy a piaci csere korlátozza a vállalat által beszerzett és eladott áruk mennyiségét, ahol x_t^{ko} az (1)-(4) modell optimális megoldása. Mindez azt is jelenti, hogy a vállalat maximális árbevétele függ a többi vállalat által értékesített és beszerzett termékek mennyiségétől. Itt feltesszük, hogy a vállalat számára ismertek a más vállalatok által piacon realizált egyensúlyi mennyiségek.

A (17) és (18) feltételezések felhasználásával a (19)-(22) lineáris programozási feladatot definiáltuk, amely a következő formában írható fel:

$$x_t^j \ge 0, (t = 1,2,...,T) \tag{19}$$

$$c_j \cdot x_1^j \le d_j \cdot x_0^j + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_0^{ko} - c_k \cdot x_1^{ko}\right) \tag{20}$$

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{m} \left(d_j \cdot x_{t-1}^{ko} - c_j \cdot x_t^{ko}\right), (t = 2,3,..,T) \tag{21}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j\right) \cdot x_t^j \to \max. \tag{22}$$

A probléma megoldása könnyen megadható, ugyanis ha nempozitív az árbevétel, vagyis $p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j \le 0$, akkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus, azaz x_t^{jo} = 0, (t = 1,2,…,T) is lehet. Ezt szekvenciálisan láthatjuk be, a bizonyítást a függelék tartalmazza. Ugyanakkor a célfüggvény (17) összefüggésnek megfelelő átalakítása során látható, hogy a (10) egyenlőség teljesülése miatt a Neumann-i megoldás, azaz az (5)-(8) lineáris programozási feladat megoldása is adja a zérus nyereséget. Mindez azzal a következménnyel járhat, hogy el kell vetni a nempozitív nyereség feltételezését ebben a modellben, vagyis akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak, ágazatoknak tekintjük.

A továbbiakban feltételezzük, hogy nemnegatív nyereség fordulhat elő: $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \ge 0, (t = 1,2,...,T), (j = 1,2,...,m)$. Ez a feltételezés azt mondja ki, hogy egységnyi szintű működés esetén a t-ik periódusra a termelési időszak végi készlet értékének nagyobbnak kell lennie, mint az inputként szereplő készletek értéke. Ha ezt a feltételt nem tennénk meg, akkor a nempozitivitás miatt az optimális szintek értéke 0 lenne, amit nem tudnánk értelmezni.

A feltételezés ellentmondásban van a klasszikus Neumann-modell azon feltételezésével, hogy nem pozitív nyereséget értelmezünk. Azonban vállalatok modelljeként tekintve Neumann növekedési modelljét az eredeti feltételezés nem lenne - amint láttuk - tartható.

1. példa. Fejtegetésünket szemléltessük egy számpéldával. Tételezzük fel, hogy az alábbi két technológiával rendelkező gazdaságban három vállalat létezik, valamint két termék:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ebben a gazdaságban a vállalatok a következő termelési technológiával rendelkeznek.

1. vállalat: $d_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
2. vállalat: $d_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$,
3. vállalat: $d_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ez azt jelenti, hogy az első vállalat esetén a beszerzendő termék a második, aminek egy egységnyi felhasználásával kettő darab első terméket állíthat elő. A másik két vállalatra ugyanígy értelmezhetjük a vektorainkat.

Tegyük most fel, hogy az (1)-(4) és (5)-(8) feladatokat vizsgáljuk. Legyen a nulladik időszak termelési szintje x_0 = [1,1,1], ami azt jelenti, hogy a nulladik periódus végén cserére rendelkezésre álló termékmennyiség $D \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$. Ugyanakkor tételezzük fel azt is, hogy három periódus termelési és árképzését vizsgáljuk. Ekkor legyen a negyedik periódus árvektora: p_4 = [1,1], amiből az egységnyi árbevétel (kiadás) $p_4 \cdot D = [4 \quad 5 \quad 7]$.

Az (1)-(4) feladat induló és megoldási táblája a Microsoft Excel solveréből ekkor:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
4,222222	0	0,555556	1,987654	0	2,469136	5,105624	0	1,652949		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	7	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	9	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	1,78E-15	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	7,55E-15	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	3,55E-15	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	7,99E-15	0
0	0	0	0	0	0	4	5	7		31,99314

Innen látható, hogy az optimális megoldás a jobb alsó sarokban látható, ami nagyjából 32 pénzegység. Az optimális megoldást a második sor tartalmazza. Amint látható a második vállalat nem fog termelni, mert a harmadik vállalat hatékonyabban állítja elő a második terméket.

Az (5)-(8) feladat megoldása, vagyis a Neumann-rendszer megoldását a következő táblázat tartalmazza:

p11	p12	p21	p22	p31	p32		
1,775034	2,174211	1,493827	1,641975	1,111111	1,444444		
1	2	-3	-1	0	0	5,11E-15	0
3	2	-1	-4	0	0	1,611797	0
5	1	-3	-4	0	0	-8,88E-16	0
0	0	1	2	-3	-1	2,44E-15	0
0	0	3	2	-1	-4	0,876543	0
0	0	5	1	-3	-4	8,88E-16	0
0	0	0	0	1	2	4	4
0	0	0	0	3	2	6,222222	5
0	0	0	0	5	1	7	7
7	9	0	0	0	0		31,99314

Ez a feladat duálisa az előbbinek, ezért lesz az optimális célfüggvény értéke szintén mintegy 32. Az optimális megoldásban a tervezési horizonton mindkét terméket termelik, hiszen pozitív a termékeke árnyékára.

A következőkben tételezzük fel, hogy az utóbbi árnyékárak a valódi piaci árak, és próbáljuk ennek segítségével maximalizálni a termelési szintek vektorait, amint azt a (19)-(22) feladatok is teszik. Ekkor az optimális megoldást szolgáltató Microsoft Excel tábla az alábbi:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0
0	-21,6296	0	0	-13,8889	0	0	-5,66665	0		0

A célfüggvényben szereplő vektort a

$$\begin{bmatrix} p_1^o & p_2^o & p_3^o & p_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \\ D & -C & 0 \\ 0 & D & -C \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

művelet elvégzésével nyerhetjük, amely az időszaki termékekre eső nyereséget tartalmazza. Amint látható, ez a fajlagos zérus, ha a terméket termelik, és negatív, ha nem termelik. Az optimális célfüggvény értéke zérussal egyezik meg, de az eredmény azt is mutatja, hogy az optimális termelési szintek ekkor erre a megoldásra szintén nullával egyeznek meg.

3. A Neumann-modell egy másfajta megfogalmazása

A modellt a fentiek ismeretében a következő módon írhatjuk fel, mint a (23)-(28) optimalizálási feladatot:

$x_t \geq 0,\ p_t \geq 0\ (t = 1,2,\ldots,T),$ (23)

$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0,$ (24)

$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0,\ (t = 2,3,\ldots,T),$ (25)

$- p_t \cdot C + p_{t+1} \cdot D \geq 0$, ($t = 1,2,\ldots,T$-1), (26)

$p_T \cdot C \leq p_{T+1} \cdot D$, (27)

$$\begin{bmatrix} p_1 \cdot d_1 \cdot x_0^1 + \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot d_1 - p_t \cdot c_1\right) \cdot x_t^1 \\ p_1 \cdot d_2 \cdot x_0^2 + \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot d_2 - p_t \cdot c_2\right) \cdot x_t^2 \\ \ldots \\ p_1 \cdot d_m \cdot x_0^m + \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot d_m - p_t \cdot c_m\right) \cdot x_t^m \end{bmatrix} \rightarrow opt\,, \tag{28}$$

ahol $D \cdot x_0$ az ismert készletállomány a tervezési periódus elején, valamint $p_{T+1} \cdot D$ egységnyi kibocsátás értéke a tervezési periódus legvégén. A feladat így annak a $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ termelési szerkezetnek és $\{p_t\}_{t=1}^{T}$ árrendszernek a felkutatása, ami mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. A vázolt probléma tehát egy játékelméleti, többcélú programozási feladat megoldását igényli. Matematikailag vizsgálva a problémát egy kvadratikus többcélfüggvényes matematikai programozási feladatot nyertünk. (Lásd pl. Krekó (1972) művét.) Az ilyen feladatot visszavezethetjük egy egycélfüggvényes matematikai programozási feladattá, amennyiben a célvektort egy konstans $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ nemnegatív vektorral szorozzuk meg, amelyet az összegző vektorral szorozva éppen egyet kapunk, azaz $1'\lambda = 1$. A többcélfüggvényes programozás témaköréből ismert, hogy a megoldások halmaza nemkonvex, ugyanis az összes lehetséges λ vektorra meg kellene oldanunk a problémát. A továbbiakban más utat választunk.

A feladat megoldását egyszerűsítsük arra az esetre, amikor a gazdaságban képződő összes nyereséget maximalizáljuk, azaz az előbbi feladat célfüggvénye a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C\right) \cdot x_t + p_1 \cdot D \cdot x_0 \rightarrow \max .$$

Ekkor $\lambda_i = \dfrac{1}{m}$. A feladatot még egyszerűbb formában is felírhatjuk, ha az árvektorokat és a tevékenységi szintek vektorát, valamint a mátrixokat összevonjuk:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{T-1} \\ x_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_{T-1} \\ p_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -D & C & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C & \\ 0 & 0 & \ldots & -D & C \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével a (23)-(28) probléma újabb, összevontabb alakja:

$\tilde{x} \geq 0,\ \tilde{p} \geq 0,$ (29)

$\tilde{C} \cdot \tilde{x} \leq a,$ (30)

$\tilde{C}' \cdot \tilde{p} \leq b,$ (31)

$-\tilde{p} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{x} + a \cdot \tilde{x} + b \cdot \tilde{p} \rightarrow \max$ (32)

ahol

$$a = \begin{bmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ D' \cdot p_{T+1} \end{bmatrix}.$$

A vesszővel a transzponáltat jelöltük. Mivel az így felvetett probléma egy kvadratikus programozási feladat, ezért még ez utóbbi feladatot is tovább egyszerűsíthetjük a (33)-(35) alakra:

$$y \geq 0, \tag{33}$$

$$E \cdot y \leq c, \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot y' \cdot E \cdot y + c \cdot y \to \max \tag{35}$$

ahol

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ennek a feladatnak a megoldása Lagrange-függvénnyel nem ad olyan szimmetrikus megoldást, mint a lineáris programozás dualitási eredményei, ezért eltekintünk annak vizsgálatától. A megoldás létezésének elemzésétől is eltekintünk, mert a mátrixokra tett Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) feltételezések garantálják a (33)-(35) programozási feladat megoldását. Foglalkozzunk inkább e feladat stacionárius megoldásaival.

A stacionárius megoldás legyen újra $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$. Ekkor

$$D \cdot x \geq \alpha \cdot C \cdot x, \tag{36}$$

$$p \cdot C \leq \beta \cdot p \cdot D. \tag{37}$$

$$p \cdot C \cdot x > 0 \tag{38}$$

A p árvektor és az x termelési szintek vektora ebben az esetben is nemnegatív. Ez a modellváltozat tehát három ponton különbözik a klasszikus (11)-(15) Neumann-modelltől. Hiányoznak belőle a (12) és (14) dualitási tulajdonságok, valamint a (13) összefüggésben az egyenlőtlenség előjele megfordult. Az optimális α növekedési rátát, és a β árnövekedési rátát, optimalizálási feladat megoldásaként kaphatjuk meg.

A modell megoldása így azon (α, x, β, p) egyensúlyi pályák felkutatása, amelyekre α maximális, és β minimális. Ha β minimális, akkor $\frac{1}{\beta}$-nak maximálisnak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellben nem kell minden vállalatnak maximális nyereséget elérnie, mint a klasszikus Neumann-modellben, hanem csak egy maximális nyereséget, amint azt a következő összefüggés mutatja:

$$\frac{p\cdot\left(d_j - c_j\right)}{p\cdot c_j} \geq \frac{1}{\beta} - 1. \tag{39}$$

A (39) képlet szerint a *j*-ik vállalat eszközarányos nyeresége nagyobb, mint egy adott érték, amit a garantált nyereségként definiálhatunk. Az extraprofitot azok a vállalatok érhetnek el, amelyeknél a (39) egyenlőtlenség szigorú formában teljesül. Az extraprofit nagysága ekkor az *i*-ik vállalatra

$$\frac{p\cdot d_i}{p\cdot c_i} - \frac{1}{\beta} > 0\,.$$

Az egyensúly létezését Hegedűs és Zalai (1978) bizonyították. Ebben az esetben azonban a duális oldalról is hasonlóan bizonyítható az egyensúly létezése.

2. példa. Folytassuk az eredmények szemléltetését az 1. példa mátrixaival és vektoraival. Először az új értelmezés egyensúlyi termelési szintjeit és árvektorait a következő két feladat optimális megoldásaiként kaphatjuk meg:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ \alpha \in \Re$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\alpha \to \max$$

A feladat megoldását szintén Microsoft Excellel elő lehet állítani: x_1 = 0,648371, x_2 = 0, x_3 = 0,351629. Az optimális növekedési ütem: α = 1,246616.

A legalacsonyabb árnövekedést az alábbi feladat megoldása szolgáltatja:

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \ \beta \in \Re$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\beta \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\beta \to \min$$

Az optimális értékek a következők: p_1 = 0,411277, p_2 = 0,588723, β = 0,871702. A garantált profitráta ekkor $\frac{1}{\beta} = 1{,}147181$, vagyis mintegy 15 százalék.

A (33)-(35) feladat megoldását az alábbi táblázat tartalmazza:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	p11	p12	p21	p22	p31	p32		
4,222222	0	0,555556	0	2,555556	1,333333	0	0	1,311111	-1E-06	1,57143	0,857143	0,571428	0	2		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,66E-15	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	-14,24444	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	0	0	-2,89E-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	0	0	-2,22E-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	0	0	-3,285719	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	1,39E-12	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	-4,285713	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	-3,142855	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	2	7
																37,66667

Az optimális megoldás ekkor a tervezési horizonton 37,666667, az optimális termelési szinteket és az árvektorokat a táblázat második bekeretezett sora tartalmazza. Összevetve ezt a megoldást a klasszikus Neumann-modell megoldásával látható, hogy a gazdaság összes nyeresége majdnem hat pénzegységgel nőtt.

4. Összegzés

A dolgozat abból a feltételezésből indult ki, hogy a Neumann-modell eljárásainak egy-egy vállalat (iparág) is feleltethető meg. Feltételezve, hogy az így definiált vállalatok célja a nyereség maximalizálása, azt kérdeztük, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie az egyensúly eléréséhez. Arra az eredményre jutottunk, hogy a Neumann-modell eredeti feltételei közül kettő továbbra is teljesül, nevezetesen a naturális egyensúly, valamint az időszak elejei készletek értékének pozitivitása, de az áregyensúlynak meg kell fordulnia, vagyis nemnegatív nyereségek kellenek, hogy legyenek az új modellben. Az új modellben a dualitási feltételekről is le kell, hogy mondjunk.

További kutatást igényel, hogy α és β milyen feltételek mellett lehetnek azonosak. Ezen kívül azt is kérdezhetjük, hogy hogyan alakul az egyensúly stacionárius feltétele, ha egy vállalat több eljárással (technológiával) rendelkezik.

Hivatkozások

1. Asmanov, Sz. A. (1984): Vvegyenyije v matyematyicseszkuju ekonomiku, Nauka, Moszkva
2. Bródy András (1980): Ciklus és szabályozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
3. Dorfman, R., Samuelson, P.A., Sollow, R.M. (1958): Linear programming and economic analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London
4. Hegedűs Mikós, Zalai Ernő (1978): Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
5. Kemeny, J.G., Morgenstern, O., Thompson, G.L. (1956): A generalization of von Neumann’s model of an expanding economy, Econometrica 24, 115-135
6. Koopmans, T.C. (Eds.) (1951): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York
7. Krekó Béla (1972): Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
8. Lancaster, K. (1968): Mathematical economics, Collier-Macmillan Lmited, London
9. Medvegyev Péter (1984): A general existence theorem for von Neumann economic growth model, Econometrica 52, 963-974

10. Móczár József (1995): Reducible von Neumann models and uniqueness, Metroeconomica 46, 1-15
11. Móczár József (1997): Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models, Metroeconomica 48, 280-299
12. Neumann, J. von: (1945): A model of general economic equlibrium, Review of Economic Studies 13, 1-9
13. Zalai Ernő (1999): A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén, Közgazdasági Szemle XLVI., 600-628
14. Zalai Ernő (2004): The von Neumann model and the early models of general equlibrium, Acta Oeconomica 54, 3-38

Függelék.

A (19)-(22) probléma megoldását arra az esetre vizsgáljuk, amikor a fajlagos árbevétel/ráfordítás nempozitív, azaz $p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j \le 0$. Azt látjuk be, hogy ekkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus lehet, azaz $x_t^{jo} = 0$, ($t = 1,2,\ldots,T$). Ezt szekvenciálisan láthatjuk be.

Vizsgáljuk először az x_T^j optimális értékét; feltételezve, hogy a többi optimális termelési szint x_t^{jo}, ($t = 1,2,\ldots,T$-1) ismert. Az optimalizálási feladat alakja ekkor

$$x_T^j \ge 0\,,$$

$$c_j \cdot x_T^j \le d_j \cdot x_{T-1}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{T-1}^{ko} - c_k \cdot x_T^{ko} \right),$$

$$\left(p_{T+1}^o \cdot d_j - p_T^o \cdot c_j \right) \cdot x_T^j \to \max\,.$$

Mivel a célfüggvény nempozitív, ezért annak felső korlátja zérus. Ezt az értéket akkor éri el a célfüggvény, ha az x_T^{jo} optimális termelési szint nulla, vagyis $x_T^{jo} = 0$. Ennek az összefüggésnek minden egyes vállalatra igaznak kell lennie, ezért $x_T^{jo} = 0$, ($j = 1,2,\ldots,m$).

Tekintsük most a (T-1)-ik periódus optimális termelési szintjeit, ami a következő optimalizálási feladat megoldásaként áll elő:

$$x_{T-1}^j \ge 0\,,$$

$$c_j \cdot x_{T-1}^j \le d_j \cdot x_{T-2}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{T-2}^{ko} - c_k \cdot x_{T-1}^{ko} \right),$$

$$-d_j \cdot x_{T-1}^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} d_j \cdot x_{T-1}^{ko}\,,$$

$$\left(p_T^o \cdot d_j - p_{T-1}^o \cdot c_j \right) \cdot x_{T-1}^j \to \max\,,$$

ahol ($j = 1,2,\ldots,m$). Ennek a feladatnak a megoldása $x_{T-1}^{jo} = 0$, ($j = 1,2,\ldots,m$), amint azt az előző optimalizálási feladat megoldásakor is láttuk.

Szekvenciálisan folytatva az optimalizálási feladatok megoldását azt kapjuk, hogy nempozitív árbevétel/ráfordítás esetén a vállalatok optimális tevékenységi szintje zérus, azaz a semmittevés. Ezért abban az esetben, ha az eljárásokat vállalatnak tekintjük, akkor el kell vetni a nempozitív árbevételt, és helyette a nemnegatív árbevételt kell tennünk.